

Задание К. 1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$, (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Исходные данные:

$$x = 5\sin^2(\pi t/6); y = -5\cos^2(\pi t/6) - 3;$$

$$t_1 = 1 \text{ с.}$$

Решение. Уравнения движения) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время t из уравнении .

$$\sin^2(\pi t/6) = x/5; \cos^2(\pi t/6) = 1 - x/5$$

$$y = -5(1 - x/5) - 3$$

$$y = -5 + x - 3$$

Получаем $y = x - 8$, т. е. траекторией точки является прямая, показанная на рисунке.

Вектор скорости точки

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$$

Вектор ускорения

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$$

Здесь \mathbf{i}, \mathbf{j} - орты осей x и y ; v_x, v_y, a_x, a_y - проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

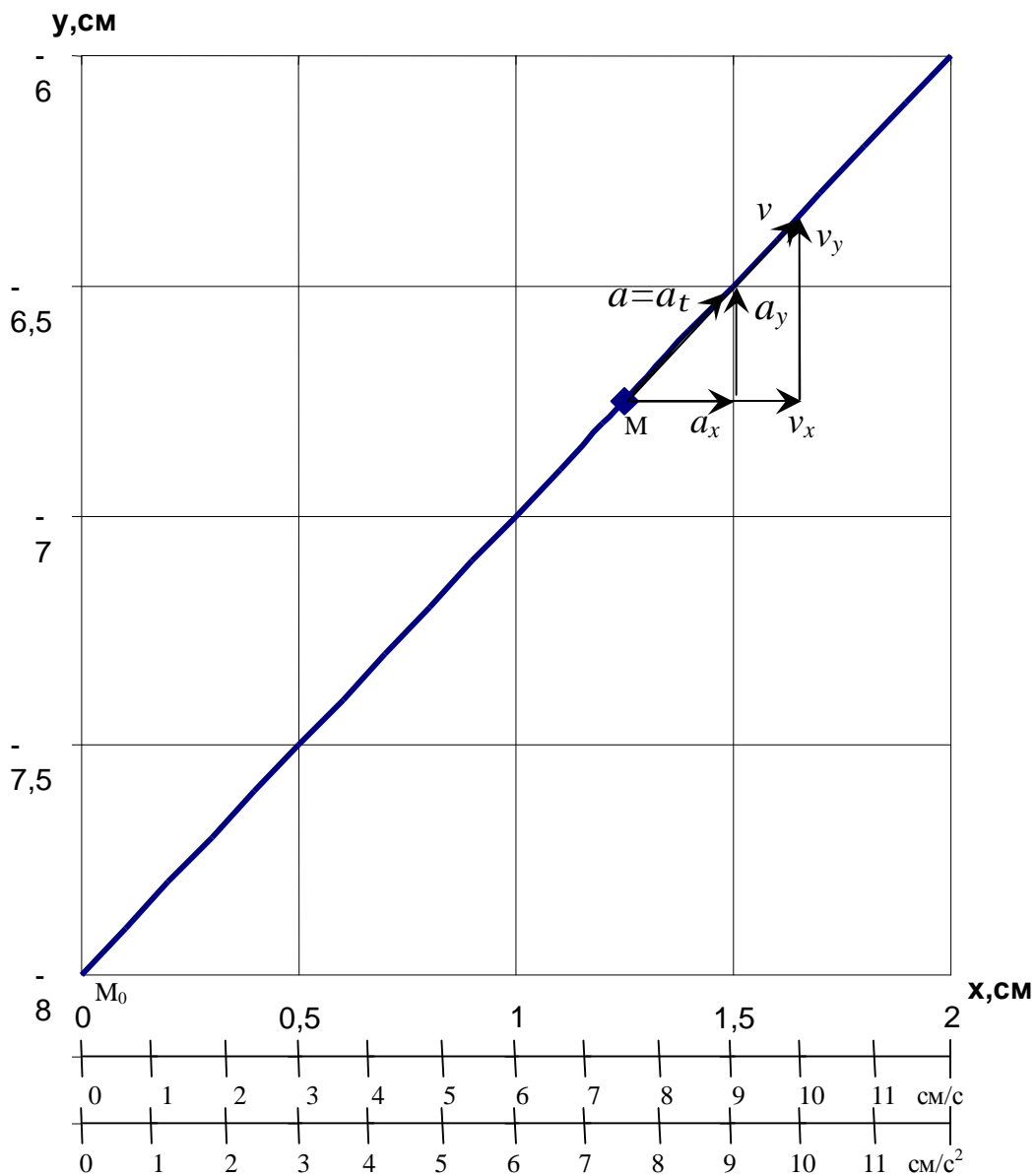
Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения:

$$v_x = \dot{x} = \frac{10p}{6} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{5p}{6} \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) = 2,267 \text{ см/с};$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{10p}{6} \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{5p}{6} \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) = 2,267 \text{ см/с};$$

$$a_x = \ddot{x} = \frac{5p^2}{18} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) = 1,37 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = \ddot{y} = \frac{5p^2}{18} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) = 1,37 \text{ см/с}^2;$$



По найденным проекциям определяются модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2,267^2 + 2,267^2} = 3,206 \text{ см/с}$$

и модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1,37^2 + 1,37^2} = 1,94 \text{ см/с}^2$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_t = |dv/dt|,$$

или

$$a_t = |\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{a}}/v|;$$

$$a_t = |(v_x a_x + v_y a_y)/v| = (2,267 \cdot 1,37 + 2,267 \cdot 1,37)/3,206 = 1,94 \text{ см/с}^2$$

dv/dt выражает проекцию ускорения точки на направление ее скорости. Знак «+»

при dv/dt означает, что движение точки ускоренное, направления \dot{a}_t и \dot{v} совпадают; знак «—» - что движение замедленное.

Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = v^2/r$$

Если радиус кривизны траектории r в рассматриваемой точке неизвестен, то a_n можно определить по формуле

$$a_n = |\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{a}}|/v$$

При движении точки в плоскости формула принимает вид

$$a_n = |v_x a_y - v_y a_x|/v = (2,267 \cdot 1,37 - 2,267 \cdot 1,37)/3,206 = 0$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{1,94^2 - 1,94^2} = 0$$

После того как найдено нормальное ускорение, радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$r = v^2/a_n = 3,206^2/0 = \infty$$

Результаты вычислений для заданного момента времени $t_1 = 1$ с приведены в таблице

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с ²					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_t	a_n	r
1,25	-6,75	2,267	2,267	3,206	1,37	1,37	1,94	1,94	0	∞

На рисунке показано положение точки M в заданный момент времени. Вектор V строим по составляющим v_x и v_y , причем этот вектор совпадает по направлению с траекторией. Вектор a строим по составляющим a_x и a_y и затем раскладываем на составляющие a_t и a_n . Так как $a_n=0$ (траектория - прямая линия), то тангенциальная составляющая вектора ускорения совпадает с самим вектором. Совпадение величин a_t и a_n найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.