

Определение реакций опор и усилий в стержнях плоской фермы

К одному из узлов плоской фермы приложена сила $P=10\text{ кН}$. Определить реакции опор фермы (при помощи теоремы о равновесии трех непараллельных сил), а также усилия во всех ее стержнях способом вырезания узлов. Вес стержней не учитывать. Результаты аналитического расчета проверить для каждого узла путем построения силового многоугольника.

Основываясь на полученных значениях усилий в стержнях, определить реакции опор фермы также и аналитическим способом.

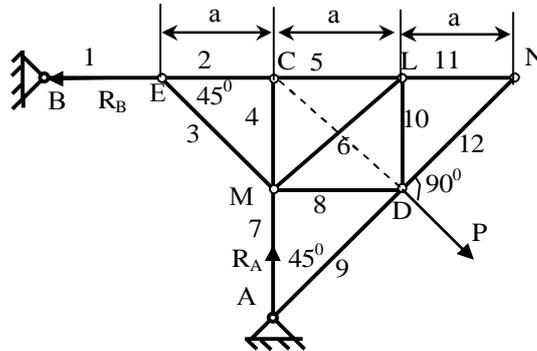


Рис.1

Решение

1. *Определение реакций опор.* Рассмотрим внешние силы, приложенные к ферме: задаваемую силу P и реакции опор R_A и R_B . Так как опора В стержневая, то линия действия реакции R_B известна: она направлена по оси стержня 1. Линию действия реакции R_A определяем, применяя теорему о равновесии трех непараллельных сил.

Три силы P , R_A и R_B взаимно уравновешиваются, следовательно, линии их действия пересекаются в одной точке.

Находим точку пересечения линии действия сил P и R_B . Линия действия реакции R_A проходит через эту точку (точку С) и центр шарнира А. Строим замкнутый силовой треугольник. Его построение начинаем с силы P . Через начало вектора \vec{P} проводим прямую, параллельную линии действия одной реакции, например \vec{R}_A , а через конец — прямую, параллельную линии действия \vec{R}_B до их взаимного пересечения.

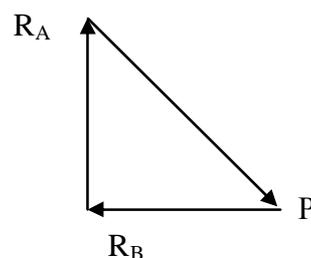


Рис.2

Стороны полученного замкнутого силового треугольника определяют модули и направления опорных реакций R_A и R_B . Из подобия силового

треугольника и треугольника ABC находим R_A и R_B

$$\frac{R_B}{MD} = \frac{P}{CD} = \frac{R_A}{CM}$$

Приняв $MD = a$, получим:

$$CM = a, CD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Следовательно

$$\frac{R_B}{a} = \frac{P}{a\sqrt{2}} = \frac{R_A}{a}$$

Откуда $R_A = R_B = P/\sqrt{2} = 10/1,41 = 7,09$ кН.

2. *Определение усилий в стержнях фермы.* Кроме внешних сил, которые могут быть приложены к узлу фермы, на каждый ее узел действуют реакции сходящихся в нем стержней. Эти реакции равны усилиям в стержнях.

Рассматриваем равновесие сил, приложенных к каждому узлу фермы, выбирая узлы в такой последовательности, чтобы число неизвестных сил в узле не превышало двух.

Условно предполагаем, что все стержни растянуты, т. е. реакция стержней направлены от узлов. Отрицательные знаки найденных реакций показывают, что соответствующие стержни не растянуты, а сжаты, т. е. реакции этих стержней направлены к узлам.

Реакции каждого стержня обозначим S и S' . причем $S = -S'$.

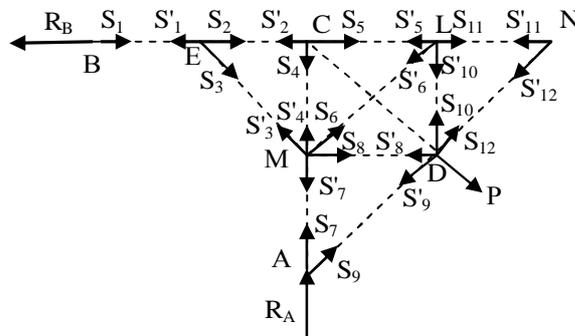


Рис.3

Расчет начинаем с узла D

$$\sum X_i = 0; -S'_8 - S'_9 \cos 45^\circ + S_{12} \cos 45^\circ + P \cos 45^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; S_{10} + S_{12} \sin 45^\circ - S'_9 \sin 45^\circ - P \sin 45^\circ = 0$$

Перейдем от осей X и Y к осям X' и Y' , повернутым относительно исходных на 45° .

$$\sum X'_i = 0; -S'_9 + S_{12} = 0; \quad (2)$$

$$\sum Y'_i = 0; S_8 \cos 45^\circ + S_{10} \cos 45^\circ - P = 0$$

Узел N

$$\sum X_i = 0; \quad -S'_{11} - S_{12} \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -S_{12} \sin 45^\circ = 0;$$

откуда

$$S_{11} = 0 \text{ кН}, \quad S_{12} = 0 \text{ кН}$$

Следовательно из (2): $S_9 = 0$ кН.

$$\text{Из (1)} \quad S_{10} = -S_{12} \sin 45^\circ + S'_9 \sin 45^\circ + P \sin 45^\circ = 10 \sin 45^\circ = 7,09 \text{ кН.}$$

$$\text{Тогда из (2)} \quad S_8 = \frac{P}{\cos 45^\circ} - S_{10} = 7,09 \text{ кН}$$

Значение S_8 и S_{10} получается положительным. Следовательно, стержни 8 и 10 растянуты.

Реакции других стержней фермы определяем аналогично.

Узел L

$$\sum X_i = 0; \quad -S'_5 - S'_6 \cos 45^\circ + S_{11} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -S'_6 \sin 45^\circ - S'_{10} = 0$$

откуда

$$S'_6 = \frac{S'_{10}}{\sin 45^\circ} = -10 \text{ кН.}$$

$$S'_5 = -S'_6 \cos 45^\circ = 7,09 \text{ кН.}$$

Узел C

$$\sum X_i = 0; \quad -S'_2 + S_5 = 0$$

$$\sum Y_i = 0; \quad S_4 = 0$$

откуда

$$S_2 = S_5.$$

Узел M

$$\sum X_i = 0; \quad -S'_3 \sin 45^\circ + S_6 \cos 45^\circ + S_8 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad S'_4 + S'_3 \cos 45^\circ + S_6 \sin 45^\circ - S'_7 = 0$$

Откуда

$$S'_3 = \frac{S_6 \cos 45^\circ + S_8}{\sin 45^\circ} = 0;$$

$$S'_7 = S'_4 + S'_3 \cos 45^\circ + S_6 \sin 45^\circ = 0.$$

Для проверки расчета строим в масштабе треугольник сил S'_6, S_7 и S_8 .

(учитываем, что S_6 и S_7 отрицательны)

Треугольник сил получается замкнутым, т. е. реакции определены правильно.

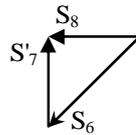


Рис.4

Узел E

Составим два уравнения равновесия сил, приложенных к этому узлу:

$$\sum X_i = 0; \quad -S'_1 + S_2 + S_3 \cos 45^\circ = 0,$$

$$S_3 \sin 45^\circ = 0$$

откуда

$$S_3 = 0; \quad S_2 = S'_1 = 7,09 \text{ кН}$$

Таким образом, реакции всех стержней фермы определены.

Заметим, что реакции опор рассматриваемой фермы можно определить, составив уравнения равновесия сил, приложенных в узлах A и B.

Узел A

$$\sum X_i = 0; \quad R_A + S_7 + S_9 \cos 45^\circ = 0,$$

откуда

$$R_A = -S_7 = 7,09 \text{ кН}$$

$$\text{Узел B, } \sum X_i = 0; \quad R_B = S_1$$

3. Составление таблицы усилий в стержнях фермы и построение схемы фермы с действительными направлениями этих усилий.

По результатам расчета составляем таблицу усилий в стержнях фермы

| Номер стержня | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---------------|------|------|---|---|------|----|---|------|---|------|----|----|
| Знак усилия | + | + | | | + | - | | + | | + | | |
| Усилие (кН) | 7,09 | 7,09 | 0 | 0 | 7,09 | 10 | 0 | 7,09 | 0 | 7,09 | 0 | 0 |

Схема фермы с действительными направлениями усилий в стержнях показана на рис. 3.