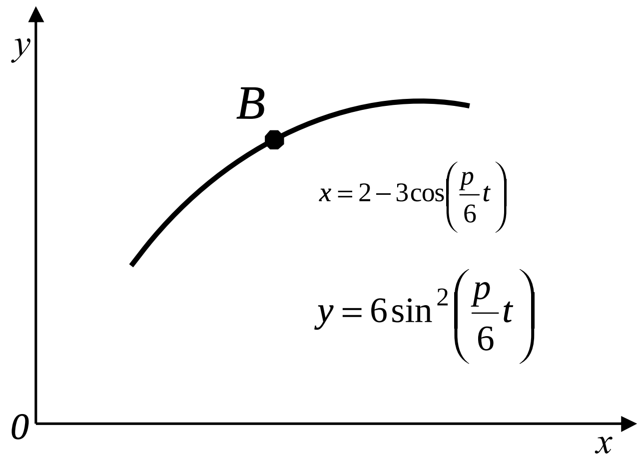
К1. Точка В движется в плоскости ху; (траектория на рисунке показана условно). Закон движения задан уравнениями: $x = 2 - 3\cos\left(\frac{p}{6}t\right)$; $y = 6\sin^2\left(\frac{p}{6}t\right)$, где x и y выражены в сантиметрах, а t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени t_1=1с определить скорость и ускорение точки, ее касательное и нормальное ускорение, радиус кривизны в соответствующей точке траектории.



Дано: $x = 2 - 3\cos\left(\frac{p}{6}t\right)$; $y = 6\sin^2\left(\frac{p}{6}t\right)$.

Определить: f(x,y) при t_1=1с, $\bar{v}$, $\bar{a}_t$, $\bar{a}_n$, $\bar{a}$, r .

Решение:

1. Для определения уравнения траектории точки в виде зависимости f(x,y), выразим x через y:

$$\frac{2-x}{3} = \cos\left(\frac{p}{6}t\right);$$

$$\frac{2-x}{3} = \sqrt{1-\sin^2\left(\frac{p}{6}t\right)};$$

$$\left(\frac{2-x}{3}\right)^2 = 1-\sin^2\left(\frac{p}{6}t\right)$$

$$\sin^2\left(\frac{p}{6}t\right) = 1-\left(\frac{2-x}{3}\right)^2;$$

$$\frac{y}{6} = \sin^2\left(\frac{p}{6}t\right)$$

$$\frac{y}{6} = 1 - \left(\frac{2-x}{3}\right)^2$$

$$y = 6\left[1 - \left(\frac{2-x}{3}\right)^2\right]$$

получим окончательное уравнение траектории точки :

$$y = 6 - 6\left(\frac{2-x}{3}\right)^2$$

Траектория движения точки есть кривая параболического вида

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на оси координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_x = \dot{x} = \left[2 - 3\cos\left(\frac{p}{6}t\right)\right]' = 2p\sin\left(\frac{p}{6}t\right)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_y = \dot{y} = \left(6\sin^2\left(\frac{p}{6}t\right)\right)' = 2p\sin\left(\frac{p}{6}t\right)\cos\left(\frac{p}{6}t\right) = p\sin\left(\frac{p}{3}t\right)$$

$$v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}}$$

Скорость движения точки в момент времени $t = 1c$ будет равна:

$$v_x(1) = 2p\sin\left(\frac{p}{6}\right) = 3{,}14\ (см/c); \quad v_y(1) = p\sin\left(\frac{p}{3}\right) = 2{,}712\ (см/c) \qquad (3)$$

$$v(1) = \sqrt{\left(v_x(1)\right)^2 + \left(v_y(1)\right)^2} = \sqrt{3{,}14^2 + 2{,}712^2} = 4{,}16\ (см/c)$$

3. Ускорение точки также найдем по его проекциям на оси координат:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; \quad a_x = \dot{v}_x = \left(2p\sin\left(\frac{p}{6}t\right)\right)' = \frac{p^2}{3}\cos\left(\frac{p}{6}t\right)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}; \quad a_y = \dot{v}_y = \left(p\sin\left(\frac{p}{3}t\right)\right)' = \frac{p^2}{3}\cos\left(\frac{p}{3}t\right)$$

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}}\ ,$$

Ускорение движения точки в момент времени $t = 1c$ будет равно:

$$a_x(1) = \frac{p^2}{3}\cos\left(\frac{p}{6}\right) = 2{,}859\ \left(см/c^2\right)$$

$$a_y(1) = \frac{p^2}{3}\cos\left(\frac{p}{3}\right) = 1{,}649\ \left(см/c^2\right)$$

$$a(1) = \sqrt{a_x(1)^2 + a_y(1)^2} = \sqrt{(2{,}859)^2 + (1{,}649)^2} = 3{,}3\ \left(см/c^2\right)$$

4. Дифференцируя по времени равенство $v^2 = v_x^{\,2} + v_y^{\,2}$, получим выражение:

$$2v\frac{dv}{dt} = 2v_x\frac{dv_x}{dt} + 2v_y\frac{dv_y}{dt}$$

В выражении $\frac{dv}{dt} = a_t$, $\frac{dv_x}{dt} = a_x$, $\frac{dv_y}{dt} = a_y$, поэтому:

$2va_t = 2v_x a_x + 2v_y a_y$, откуда $a_t = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}$

Подставив известные величины, определим a_τ в момент времени $t = 1c$:

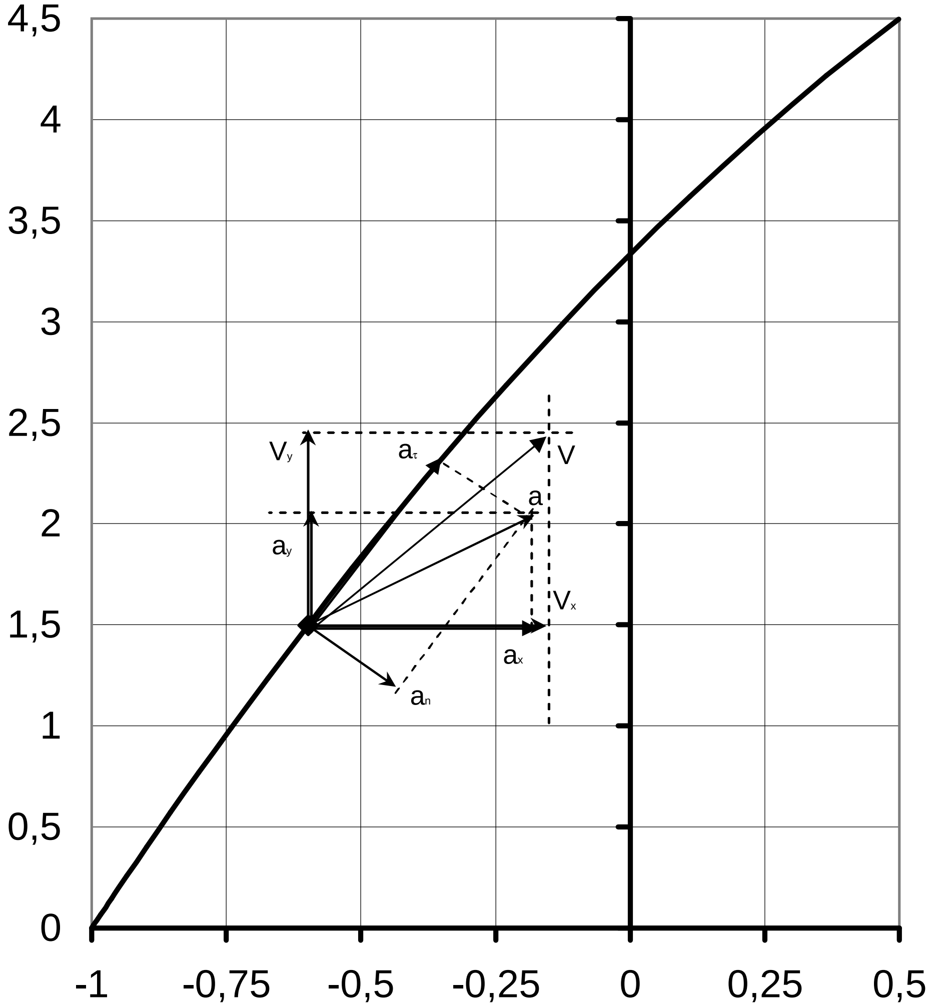
$$a_t = \frac{3{,}14 \cdot 2{,}859 + 2{,}712 \cdot 1{,}649}{4{,}16} = \frac{8{,}977 + 4{,}47}{4{,}16} = 3{,}23 \text{ см/с}^2$$

5. Нормальное ускорение $a_п$ определим по формуле: $a = \sqrt{a_n^{\,2} + a_t^{\,2}}$, откуда:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^{\,2}}; a_n = \sqrt{3{,}3^2 - 3{,}23^2} = 0{,}661 \text{ см/с}^2$$

6. Радиус кривизны траектории определяем по формуле: $r = \frac{v^2}{a_n}$

в момент времени $t = 1c$ $r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4{,}16^2}{0{,}661} = 26{,}15$ см.



4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
V_y
a_τ
V
a
a_y
V_x
a_x
a_n